Komplexe Zahlen

Teil 1

Grundrechenarten

Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

Datei Nr. 50011

Friedrich Buckel

Stand 23. November 2018

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https/:mathe-cd.de

Textübersicht

50010	Komplexe Zahlen:	Kompendium der Texte 50010 bis 50013
50011	Komplexe Zahlen 1:	Grundrechenarten, Gaußsche Ebene
50012	Komplexe Zahlen 2:	Vektorielle Darstellung, Polarkoordinaten trigonometrische und exponentielle Darstellung Eulersche Funktion $E(\varphi)$, Regel von Moivre
50013	Komplexe Zahlen 3:	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen Lösung der Gleichungen $z^n = a$ Sehr viele Beispiele
50014	Komplexe Zahlen 4	Gleichungen 3. bis 5. Grades, Fundamentalsatz
50015	Komplexe Zahlen 5	Komplexe Funktionen
50016	Komplexe Zahlen 6	Teilmengen der Gauß-Ebene
50017	Komplexe Zahlen 7	Komplexe Zahlenfolgen und Reihen
50018	Komplexe Zahlen 8	Ableitungen, holomorphe Funktionen
50019	Komplexe Zahlen 9	Lineare Gleichungssysteme
50020	Komplexe Zahlen 10	Zusätzliche Übungsaufgaben, gemischt

Inhalt von 50011

1 Warum brauchte man neue Zahlen?

Die Geschichte der Mathematik ist eine endlose Aneinanderreihung von Entdeckungen und Einführungen neuer Begriffe und Strukturen. Die Mathematik muss man als Wechselspiel zwischen Anwendung und als Mathematik um ihrer selbst willen erleben.

Hat ganz früher der Alltag die Notwendigkeit des Umgangs mit Zahlen beflügelt, so war es später vor allem die Physik, die nach neuen Methoden rief, um ihre Bereiche mathematisch erfassen zu können. Sehr oft aber haben die Mathematiker auch aus eigenen rein mathematischen Fragestellungen heraus die Notwendigkeit erkannt, Neues zu definieren, was nicht ausgeschlossen hat, dass daraus dann in umgekehrter Reihenfolge Anwendbares entstanden ist!

Die Einführung der Zahlen stellt ein solches Beispiel mathematischer Kreativität dar. Stellen wir uns nur einmal die römischen Zahlen vor. Die Römer kannten zwar den Begriff „nichts" (kein Geld, keine Sklaven, keine Soldaten), sie ordneten diesem Wort aber keine Zahl zu. Die Null war ihnen *als Zahl* also gänzlich unbekannt.

Ich will hier keine Geschichte der Mathematik schreiben. Dennoch sollen ganz kurz Beispiele für die Notwendigkeit neuer Zahlen gegeben werden.

Schüler einer üblichen 5. Klasse arbeiten in der Regel nur mit den natürlichen Zahlen. Diese Menge $\mathbb{N} = \{1;2;3;...\}$ bildet die Grundlage für das Abzählen und das Erfassen von abzählbaren Mengen. Nimmt man die Null dazu, dann entsteht die Zahlenmenge $\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;...\}$ der „nicht-negativen" Zahlen.

Die Notwendigkeit des Halbierens, Drittelns usw. einer Pizza, eines Kuchens oder eines Geldbetrages führt zu den positiven Bruchzahlen $\mathbb{B}$, mit deren Rechengesetzen man sich meistens in der Klasse 6 beschäftigt. Dann kommen auch schnell die positiven Dezimalzahlen dazu. Man kann den Kindern zeigen, dass sich jede positive Dezimalzahl als Bruch schreiben lässt, und dass man umgekehrt jeden Bruch als Dezimalzahl darstellen kann, die aber periodisch werden kann (Man kann mit angehängten Nullen jede Dezimalzahl periodisch machen). Damit lassen sich Gleichungen der Form

$$a \cdot x = b \qquad a;b \in \mathbb{N} \text{ und sogar } \in \mathbb{B}$$

lösen. Dagegen scheitert die Lösung der Gleichung $x + 8 = 3$, wenn man noch keine negativen Zahlen kennt. Nach deren Einführung hat jedoch jede Gleichung der Form

$$a + x = b \qquad a;b \in \mathbb{N}, \mathbb{Z} \text{ oder } \mathbb{Q}$$

eine eindeutige Lösung. Die Algebra der Klasse 9 bringt das Wurzelziehen und damit auch die Lösbarkeit quadratischer Gleichungen ins Spiel. Die Gleichung $x^2 - 5 = 0$ bzw. $x^2 = 5$ hat dann genau zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$. Aber wir müssen sagen, dass die Gleichung $x^2 + 5 = 0$ bzw. $x^2 = -5$ eben „keine" Lösung hat. Damit meint man, dass es **keine reelle Zahl** gibt, deren Quadrat eine negative Zahl ist.

Und jetzt kommen wir zu unserem Thema: Damit man solche Gleichungen lösen kann, hat man abermals neue „Zahlen" eingeführt. Sie haben teilweise überraschende Eigenschaften. Ich werde zeigen, warum man sie „Zahlen" nennen darf.

2 Definition der imaginären Einheit

Das angeschnittene Problem, ob man das, was jetzt eingeführt wird, noch Zahlen nennen darf, findet eine Antwort in einem Prinzip, welches die Mathematiker einmal festgelegt haben. Hermann Hankel (1839 – 1873) hat 1867 diese Forderung, genannt das **Permanenzprinzip**, ausgesprochen:

> **Neue Objekte dürfen nur dann „Zahlen" genannt werden, wenn für sie die Rechengesetze gelten, die man für die bisherigen Zahlen kennt.**

Dies ist nun eine etwas dehnbare Angelegenheit, wie wir bald sehen werden, denn wir werden lernen, dass man die neuen komplexen Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren kann, aber man kann sie nicht der Größe nach vergleichen. Und damit stellt sich die Frage, welche Gesetze sollen gelten?

Wir definieren jetzt also neue Zahlen und für sie dann Rechenoperationen.
Dazu überprüfen wir die wichtigsten Rechengesetze und geben uns damit zufrieden!
Nichts anderes tut man ja auch im Grunde, wenn man erfahren hat, was $\sqrt{2}$ ist.
Man rechnet mit dieser Zahl, ohne sie in Wirklichkeit genau zu kennen.

Wenn wir also eine Möglichkeit suchen, Gleichungen der Art

$$x^2 = -1;\ x^2 = -2;\ x^2 = -3 \text{ usw.}$$

zu lösen, tun wir das, was bereits der deutsche Mathematiker **Leonhard Euler** (1707 – 1783) getan hat, wir führen ein Symbol für die Lösung ein, dessen tiefere Bedeutung noch gar nicht klar ist. Euler hat als Symbol für die Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ das Zeichen i verwendet. i soll die Abkürzung für „imaginäre Einheit" sein. Imaginär heißt eigentlich eingebildet; i ist also *für den Neuling* eine eingebildete Zahl. Wenn i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist, kann man auch die Probe machen und erhält:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Man hat daher auch diese Schreibweise eingeführt:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Und wir wollen gleich weiterdenken: Wir wissen, dass die Gleichung $x^2 = 4$ neben der Lösung $x = 2$ auch noch die Lösung $x = -2$ hat. Hat die Gleichung $x^2 = -1$ also auch diese beiden Lösungen $x_1 = i$, $x_2 = -i$ also $x_{1,2} = \pm i$?

Nun benötigen wir unser oben erwähntes **Permanenzprinzip**. Wir verlangen, dass die gewohnten Rechengesetze hier auch gelten sollen. Dann folgt also:

$$(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{=1}\cdot i\cdot i = i^2 = -1$$

Also ist auch $-i$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Wir haben jetzt $L = \{\pm i\}$.

Das Permanenzprinzip lässt auch folgende Rechnungen zu:

$$i + i = 1 \cdot i + 1 \cdot i = (1+1) \cdot i = 2 \cdot i$$

$$5i + 12i = (5+12) \cdot i = 17 \cdot i$$

$$23i - 15i = (23-15) \cdot i = 8 \cdot i$$

$$i - 5\,i = (1-5) \cdot i = -4\,i$$

In der letzten Zeile wurde das sogenannte **Distributivgesetz** zugrunde gelegt, welches das Ausmultiplizieren von Klammern regelt:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Wir können auf diese Weise weitere „einfache" Rechnungen erstellen:

$$i \cdot 0 = 0 \cdot i = 0 \quad \text{oder} \quad i + 0 = i \quad \text{und} \quad \frac{i}{i} = 1$$

Das Potenzieren der imaginären Einheit sollte man üben:

$i^2 = -1$ (das folgt aus der Definition: $i = \sqrt{-1}$)

$$i^3 = \underbrace{i \cdot i}_{=-1} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i \quad \text{denn} \quad i^4 = 1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

allgemein: $i^{4n+r} = \left(i^4\right)^n \cdot i^r = 1^n \cdot i^r = i^r$ für r = 0 , 1 , 2 oder 3.

Also: $$\boxed{i^{4n+r} = i^r = \begin{cases} i & \text{für } r = 1 \\ -1 & \text{für } r = 2 \\ -i & \text{für } r = 3 \\ 1 & \text{für } r = 0 \end{cases}}$$

Man kann dann auch sofort Vielfache von i potenzieren:

$$(3i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

$$(-5i)^3 = (-5)^3 \cdot i^3 = -125 \cdot (-i) = 125\,i$$

$$(2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$$

Man kann selbstverständlich auch durch i-Potenzen dividieren.

Durch Erweitern beseitigt man die i-Potenz im Nenner:

$$\frac{4}{i}=\frac{4\cdot i}{i\cdot i}=\frac{4i}{-1}=-4i,\qquad \text{allgemein: } \frac{a}{i}=\frac{a\cdot i}{i\cdot i}=\frac{a\cdot i}{-1}=-a\cdot i$$

$$\frac{5}{i^2}=\frac{5}{-1}=-5\qquad \text{allgemein: } \frac{a}{i^2}=\frac{a}{-1}=-a$$

$$\frac{12\cdot i}{i^3\cdot i}=\frac{12i}{i^4}=\frac{12i}{1}=12i\qquad \text{allgemein: } \frac{a}{i^3}=\frac{a\cdot i}{i^3\cdot i}=\frac{a\cdot i}{1}=a\cdot i$$

Nun schauen wir uns diese Wurzeln an:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4\cdot i=4i$$

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5i$$

$$\sqrt{-13}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{13}\cdot i=i\sqrt{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{-2}}=\frac{2\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}{-2}=-\sqrt{2}\cdot i$$

oder so: $$\frac{2}{\sqrt{-2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot i}{\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{2}\cdot i}=\frac{2\sqrt{2}\cdot i}{2\,i^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot i}{-1}=-\sqrt{2}\cdot i$$

$$\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-18}}=\frac{\sqrt{12}\cdot i}{\sqrt{18}\cdot i}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Aufgabe 1

a)	$2\cdot 3i$	b)	$3i\cdot 6i$	c)	$(-3i)\cdot(-4i)$	d)	$i^3\cdot 4i^2$
e)	$i^5\cdot i$	f)	$\frac{4i^3}{2i^5}$	g)	$\frac{4i^2}{5i}$	h)	$1+\frac{1}{i^2}$
i)	$i^6+\frac{3}{i^2}$	j)	$\frac{1}{(-i)^3}-i$	k)	$\frac{2}{i}+\frac{3}{i^3}$	l)	$(2i^3)^{-3}$

Aufgabe 2

a)	$\sqrt{-36}$	b)	$\sqrt{-169}$	c)	$\sqrt{-48}$	d)	$\sqrt{-3}^3$
e)	$\frac{4}{\sqrt{-2}}$	f)	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$	g)	$\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$	h)	$\frac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}}$.

3 Definition der komplexen Zahlen

Die Lösung der folgenden drei quadratischen Gleichungen zeigt, was wir von diesen neuen Zahlen erwarten. Dazu verwende ich diese allgemeine Lösungsformel:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Beispiel 1

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

Das bei reellen Zahlen übliche Berechnungsverfahren liefert somit die beiden Lösungen $x_1 = 2 + 2i$ und $x_2 = 2 - 2i$.

Wir machen die Probe und wenden die binomischen Formeln an, weil wir natürlich verlangen, dass auch sie gelten sollen:

Probe für $x_1 = 2 + 2i$:

$$(2+2i)^2 - 4(2+2i) + 8 = \left(4 + 8\cdot i + 4\cdot i^2\right) \cancel{-8} - 8i \cancel{+8} = (4 + 8\cdot i - 4) - 8i = 0$$

Probe für $x_2 = 2 - 2i$:

$$(2-2i)^2 - 4(2-2i) + 8 = \left(4 - 8\cdot i + 4\cdot i^2\right) \cancel{-8} + 8i \cancel{+8} = (4 - 8\cdot i - 4) + 8i = 0$$

Ergebnis: $L = \{\, 2 \pm 2i \,\}$

Beispiel 2

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm i\cdot\sqrt{11}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\cdot i$$

$$L = \left\{-\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{11}\cdot i\,;\, -\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{11}\cdot i\right\}$$

Beispiel 3

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 16} = -4 \pm \sqrt{16-32} = -4 \pm \sqrt{-16} = -4 \pm 4i$$

$$L = \{-4 \pm 4i\}$$

Bei der Lösung dieser Gleichungen sind nun „Zahlen“ aufgetaucht, die aus einer Summe einer reellen Zahl mit einer imaginären Zahl bestehen.
Diese Zahlen nennt man ***komplexe Zahlen***:

Definition: Eine Zahl der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt eine **komplexe Zahl**.

$z^* = a - bi$ heißt die **dazu konjugiert komplexe Zahl**.

a heißt der **Realteil** der komplexen Zahl z und b ihr **Imaginärteil.**

Man schreibt: **$a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.**

Jeder komplexen Zahl ordnet man auch noch einen **Betrag** zu.
Er wird so berechnet:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{C}$.
Die reellen Zahlen sind davon eine Teilmenge (mit $b = 0$).

Die Einführung der komplexen Zahlen entspringt also der Notwendigkeit, zu allen quadratischen Gleichungen Lösungen angeben zu können.

Beispiele zum Betrag und zur konjugiert komplexen Zahl:

a) $z = 3 + 4i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = 3 - 4i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

b) $z = 12 - 5i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = 12 + 5i$
Und beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

c) $z = -6 + 8i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -6 - 8i$
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

d) $z = 7i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -7i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \left(\sqrt{0^2 + 7^2}\right) = 7$.

e) $z = -4 - 12i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = -4 + 12i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

f) $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ hat die konjugiert komplexe Zahl $z^* = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.
Beide haben den Betrag $|z| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$.

Man beachte, dass eine komplexe Zahl z und die zu ihr konjugiert komplexe Zahl z* den gleichen Betrag besitzen.

Schreibt man reelle Zahlen so: $z = r + 0 \cdot i$, dann sieht man dass sie ganz spezielle komplexe Zahlen sind. Jede reelle Zahl ist identisch mit der zu ihr konjugiert komplexen. Dies gilt aber nur für reelle Zahlen, denn aus $z^* = z \Leftrightarrow a - bi = a + bi$ folgt sofort b=0 !

4 Rechnen mit komplexen Zahlen.

Um es nochmals zu sagen: Wir führen die komplexen Zahlen so ein, dass wir verlangen, dass die Gesetze der reellen Zahlen gelten sollen. Wir wollen also rechnen, wie wir es aus $\mathbb{R}$ gewohnt sind.

Daraus folgen Ergebnisse für Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten, die wir dann als Definition für die Rechenarten unserer „neuen“ komplexen Zahlen übernehmen:

(a) Beispiel für die Addition:

$$(9+2i)+(7+4i)=(9+7)+(2i+4i)=16+6i$$

Man fasst also die Realteile und die Imaginärteile zusammen und erhält so das Ergebnis als neue komplexe Zahl.

$$(-4+3i)+(2-6i)=(-4+2)+(3i-6i)=-2-3i$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}i\right)+\left(-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}i\right)=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\tfrac{1}{3}i+\tfrac{1}{2}i\right)=\left(\tfrac{2}{4}-\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\tfrac{2}{6}+\tfrac{3}{6}\right)i=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}i$$

DEFINITION DER ADDITION:

$$\boxed{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i}$$

Es werden also die Realteile addiert und ebenso die Imaginärteile.

Addiert man zu einer komplexen Zahl ihre konjugiert komplexen Zahl, erhält man eine eine reelle Zahl.

Beispiel: $(9+2i)+(9-2i)=(9+9)+(2-2)i=18\in\mathbb{R}$

Allgemein: $(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)\cdot i=2a\in\mathbb{R}$

Aufgabe 3

a) $(12+15i)+(7+4i)$ b) $(-2+5i)+(7-2i)$

c) $(-3-i)+(1-5i)$ d) $(5+2i)+(-5-2i)$

e) $(7-3i)+(-7+9i)$ f) $(1+i)+(-2-i)$

g) $(7+12i)+(-8i)$ h) $\left(\tfrac{4}{5}-i\right)+\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2-\tfrac{2}{5}i\right)+\left(-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}i\right)$ j) $\left(-\tfrac{6}{7}+\tfrac{4}{5}i\right)+(2-2i)$

k) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$, $z_1+z_1{}^*=?$

l) $z_2=5-8i$, $z_2+z_2{}^*=?$

m) $z_3=-\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{5}i$, $z_3+z_3{}^*=?$

n) $z_4=\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{2}i$, $z_4+z_4{}^*=?$

(b) Beispiel für die Subtraktion:

$$(9+2i)-(7+4i)=(9-7)+(2i-4i)=2-2i$$

Man fasst also die Realteile und die Imaginärteile zusammen und erhält so das Ergebnis als neue komplexe Zahl.

$$\left(-4+3i\right)-\left(2-6i\right)=\left(-4-2\right)\boxed{+}\left(3i+6i\right)=-6+9i$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}i\right)-\left(-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}i\right)=\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\tfrac{1}{3}i-\tfrac{1}{2}i\right)=\left(\tfrac{2}{4}+\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\tfrac{2}{6}-\tfrac{3}{6}\right)i=\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{6}i$$

DEFINITION DER SUBTRAKTION:

$$\boxed{\left(a_1+b_1i\right)-\left(a_2+b_2i\right)=\left(a_1-a_2\right)\boxed{+}\left(b_1-b_2\right)\cdot i}$$

Die Subtraktion der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine imaginäre Zahl.

Beispiel: $(9+2i)-(9-2i)=(9-9)+(2+2)i=4i$

Allgemein: $(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(b+b)\cdot i=2bi$

Aufgabe 4

a) $(12+15i)-(7+4i)$

b) $(-2+5i)-(7-2i)$

c) $(-3-i)-(1-5i)$

d) $(5+2i)-(-5-2i)$

e) $(7-3i)-(-7+9i)$

f) $(1+i)-(-2-i)$

g) $\left(7+12i\right)-\left(-8i\right)$

h) $\left(\tfrac{4}{5}-i\right)-\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2-\tfrac{2}{5}i\right)-\left(-\tfrac{3}{2}+\tfrac{\text{[illegible]}}{4}i\right)$

j) $\left(-\tfrac{6}{7}+\tfrac{4}{5}i\right)-\left(2-2i\right)$

k) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$, $z_1-z_1^*=?$

l) $z_2=5-8i$, $z_2-z_2^*=?$

m) $z_3=-\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{5}i$, $z_3-z_3^*=?$

n) $z_4=\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{2}i$, $z_4-z_4^*=?$

(c) Beispiel für die Multiplikation:

Man wendet die Klammerregel an, mit der man zwei Klammern multipliziert:

$$(9+2i)\cdot(7+4i)=9\cdot7+9\cdot4i+2i\cdot7+2i\cdot4i=63+36i+14i+8i^2=63+50i-8=55+50i$$

DEFINITION DER MULTIPLIKATION:

$$\boxed{\begin{aligned}(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)&=a_1a_2+a_1b_2 i+b_1 i\cdot a_2+b_1 i\cdot b_2 i=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+b_1b_2 i^2\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i\end{aligned}}$$

Quadrieren einer komplexen Zahl:

$$(5-3i)^2=25-30i+9i^2=25-30i-9=16-30i$$

$$(5+3i)^2=25+30i+9i^2=25+30i-9=16+30i$$

Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl

$$(5+12i)\cdot(5-12i)=5^2-12^2\cdot i^2=25+144=169$$

$$(5+3i)(5-3i)=25-9i^2=25+9=34$$

Allgemein: $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

Beobachtung: **Die Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl und zwar das Quadrat ihres Betrages.**

$$z\cdot z^*=|z| \quad\Leftrightarrow\quad (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|a+bi|$$

Ein Wort zu dieser sogenannten 4. Binomischen Formel:

$$\boxed{(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2}$$

Sie berechnet das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl.
Kehrt man diese Gleichung um, folgt

$$\boxed{a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)}$$

Man vergleiche mit der 3. Binomischen Formel: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Aufgabe 5

a)	$(2+3i)(4+7i)$	b)	$(3-8i)(5+2i)$	c)	$(12-i)(1-12i)$
d)	$(-3+2i)(6-2i)$	e)	$(5+2i)(5-2i)$	f)	$(-2-7i)(-3-8i)$

Berechne $z\cdot z^*$ für

g)	$z=2+i$	h)	$z=19-15i$	i)	$z=\sqrt{11}+5i$

d) Division von komplexen Zahlen

Bei den meisten Divisionsaufgaben wird die 4. Binomische Formel benötigt.
Schauen wir uns an, wie man durch **Erweiterung mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl** im Nenner eine reelle Zahl erzeugt:

$$\frac{3-2i}{4+5i}=\frac{(3-2i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)\cdot(4-5i)}=$$

Im Nenner wird die 4. Binomische Formel gebraucht: $(4+5i)\cdot(4-5i)=4^2+5^2=41$:

$$=\frac{12-15i-8i+\boxed{10i^2}}{16-25i^2}=\frac{12-15i-8i\boxed{-10}}{16+25}=\frac{2-23i}{41}=\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i$$

DEFINITION DER DIVISION:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_1ia_2-b_1b_2i^2}{a_2^{\;2}+b_2^{\;2}}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^{\;2}+b_2^{\;2}}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^{\;2}+b_2^{\;2}}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^{\;2}+b_2^{\;2}}i$$

Zunächst ist es eine gute Übung, einmal die Probe zu unserer Division zu machen:

$$\left(\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i\right)\cdot(4+5i)=\frac{8}{41}+\frac{10}{41}i-\frac{92}{41}i-\frac{115}{41}i^2=\underbrace{\left(\frac{8}{41}+\frac{115}{41}\right)}_{=\frac{123}{41}=3}+\underbrace{\left(\frac{10}{41}-\frac{92}{41}\right)}_{=-\frac{82}{41}=-2}i=3-2i$$

Weitere Beispiele für die Division:

$$\frac{9+2i}{7+4i}=\frac{9+2i}{7+4i}\cdot\frac{7-4i}{7-4i}=\frac{63-36i+14i-8i^2}{49+16}=\frac{71-22i}{65}=\frac{71}{65}-\frac{22}{65}i$$

$$\frac{3+5i}{-2+7i}=\frac{(3+5i)\cdot(-2-7i)}{(-2+7i)\cdot(-2-7i)}=\frac{-6+35-21i-10i}{4+49}=\frac{29-31i}{53}=\frac{29}{53}-\frac{31}{53}i$$

$$\frac{16+8i}{2-4i}=\frac{(16+8i)\cdot(2+4i)}{(2-4i)\cdot(2+4i)}=\frac{32-32+16i+64i}{4+16}=\frac{80i}{20}=4i$$

$$\frac{25-5i}{5+i}=\frac{(25-5i)\cdot(5-i)}{(5+i)\cdot(5-i)}=\frac{125-5-25i-25i}{25+1}=\frac{120-50i}{26}=\frac{60}{13}-\frac{25}{13}i$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3i}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-3i)}{(\sqrt{2}+3i)\cdot(\sqrt{2}-3i)}=\frac{2-3\sqrt{2}\cdot i}{2+9}=\frac{2}{11}-\frac{3}{11}\sqrt{2}\cdot i$$

Die **Berechnung von Kehrwerten** ist auch eine Divisionsaufgabe:

$$(4+3i)^{-1}=\frac{1}{4+3i}=\frac{1\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)}=\frac{4-3i}{16+9}=\frac{4-3i}{25}=\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$$

$$(2-6i)^{-1}=\frac{1}{2-6i}=\frac{(2+6i)}{(2-6i)\cdot(2+6i)}=\frac{2+6i}{4+36}=\frac{2+6i}{40}=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}i$$

Allgemeine Rechnung:

$$(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\quad \text{d.h.}\quad z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{z\cdot z^*}=\frac{z^*}{|z|^2}$$

Im Zähler steht also beim Kehrwertergebnis immer die zum Nenner konjugiert komplexe Zahl und im Nenner steht das Quadrat des Betrags.

Wer diese Regel im Kopf hat, kann schneller Kehrwerte berechnen.

Beispiele: $z=5+2i \Rightarrow |z|^2=25+4=29 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{5-2i}{29}=\frac{5}{29}-\frac{2}{29}i$

$z=-4-12i \Rightarrow |z|^2=16+144=160 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{-4+12i}{160}=-\frac{1}{40}+\frac{3}{40}i$

Es gibt spezielle (und später besonders wichtige) komplexe Zahlen, deren Betrag 1 ist. Für diese wird dann der Nenner 1, und dann ist der Kehrwert dieser Zahl sein konjugiert komplexer Partner:

$z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ hat den Betrag $|z|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=\sqrt{1}=1$

und den Kehrwert: $z^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i}=\frac{1\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)}{\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i}{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i}{1}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

oder: $z=\frac{2}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{5}i \Rightarrow |z|^2=\frac{4}{25}\cdot 5+\frac{1}{25}\cdot 5=\frac{25}{25}=1 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}i$:

Merke: Wenn $|z|=1$, dann ist $\frac{1}{z}=z^*$

Abschließende Bemerkung:

Diese Definitionen für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erzeugen aus zwei komplexen Zahlen wieder eine komplexe Zahl.

Da die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen sind, kann das Ergebnis in Einzelfällen sogar eine reelle Zahl sein.

Aufgabe 6

Bringe das Ergebnis auf die Form $a + bi$

a) $\frac{4}{8+3i}$ b) $\frac{i}{4-i}$ c) $\frac{2+3i}{2-3i}$ d) $\frac{4+2i}{2+4i}$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}$ f) $\frac{1-i}{i-2}$ g) $\frac{12+5i}{13-8i}$ h) $\frac{1-4i}{5+6i}$

Aufgabe 7

Berechne die Kehrwerte zu diesen Zahlen:

a) $-4+5\cdot i$ b) $-12-5i$ c) $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{6}-\frac{5}{7}i$

Aufgabe 8

Verwende die üblichen Binomischen Gesetze.

a) $\frac{3+2i}{(5-3i)^2}$ b) $\frac{2+10i}{(4+i)^2}$ c) $\frac{3-i}{(3+i)^3}$ d) $\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2$

e) $(2+4i)^3 = (2+4i)^2\cdot(2+4i) =$ f) $(5-i)^3$ g) $(3+2i)^4$

h) $\frac{(4+5i)^3}{2-2i}$

Aufgabe 9

Erstelle eine Berechnungsformel für

a) $(a+bi)^2$ b) $(a+bi)^3$

Aufgabe 10

Berechne die Lösungsmengen mit komplexen Zahlen für diese quadratischen Gleichungen:

a) $x^2+6x+10=0$ b) $x^2-3x+9=0$

c) $\frac{1}{2}x^2-3x+29=0$ d) $x^2+5x+7=0$

e) $3x^2-4x+2=0$ f) $\frac{3}{2}x^2+4x+8=0$

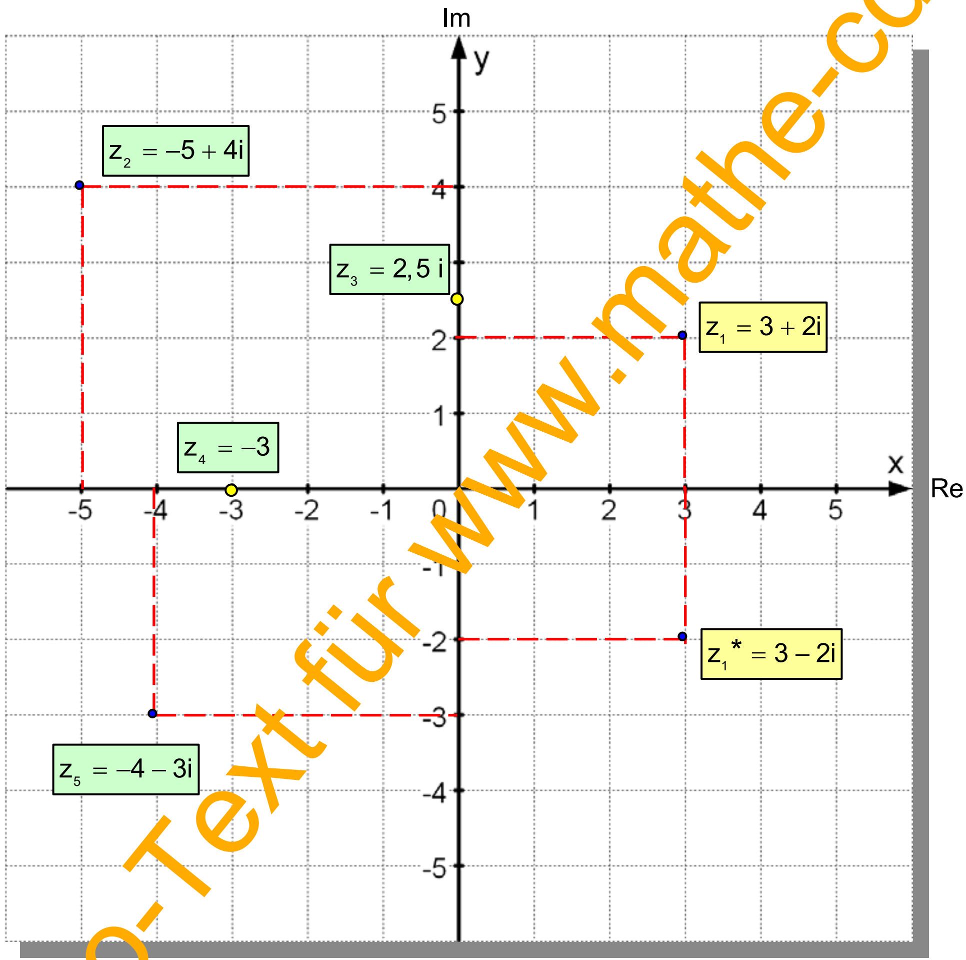
g) $x^2+7x+19=0$ h) $\frac{1}{8}x^2+3x+20=0$

5 Die Gaußsche Zahlenebene

Weil jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, dem Realteil und dem Imaginärteil, kann man jede komplexe Zahl in einem Koordinatensystem darstellen. Man nennt dies die Gaußsche Zahlenebene oder auch die Ebene der komplexen Zahlen.

Als x-Koordinate verwendet man den Realteil: $x = Re(z)$,
als y-Koordinate den Imaginärteil: $y = Im(z)$.

Die Zahl $z = 3 + 2i$ wird demnach als Punkt mit den Koordinaten $(3|2)$ dargestellt.



Konjugiert komplexe Zahlen haben den gleichen Realteil und entgegengesetzten Imaginärteil, etwa $z_1 = 3 + 2i$ und $z_1^* = 3 - 2i$. Ihre Punkte liegen also zueinander spiegelbildlich bezüglich der x-Achse! Rein imaginäre Zahlen (ohne Realteil wie z_3) liegen auf der y-Achse, die reellen Zahlen (also ohne einen Imaginärteil wie z_4) liegen auf der x-Achse.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen reellen und echt komplexen Zahlen ist die Tatsache, dass man reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Man kann also sagen, dass für zwei Zahlen a und b genau eine dieser Relationen gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Eine dieser drei Beziehungen muss stimmen!

Anders ist dies mit komplexen Zahlen wie z_1 und z_2. Sie sind verschieden, aber man kann keine von den beiden größer oder kleiner als die andere nennen!

Dies liegt daran, dass komplexe Zahlen durch Zahlenpaare festgelegt sind. Ein erster Hinweis darauf, dass doch eine andere Art „Zahlen“ vorliegt, als es die reellen Zahlen sind! Aber eines kann man dennoch tun. Man kann für jede reelle Zahl einen Betrag definieren. Der Betrag einer reellen Zahl kann man als Abstand von der Zahl 0 einführen: $|4| = 4$; $|-4| = 4$. Wir haben in § 3 auch einen „Betrag“ für komplexe Zahlen eingeführt. Und zwar durch die Formel $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Wie wir gleich sehen werden, gibt auch dieser den Abstand vom Ursprung an:

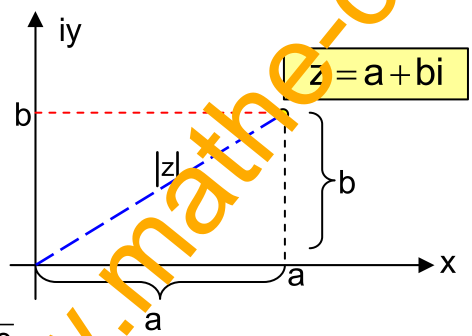
> Der Betrag einer komplexen Zahl gibt den Abstand des zugehörigen Punktes vom Ursprung in der Gaußschen Ebene an.

Beweis:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Und das ist ja genau das, was in der Definitionsformel steht!



Demnach ist

$$|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$
$$|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$
$$|7 + i| = \sqrt{7^2 + 1^1} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} \qquad \text{(Punkt A)}$$
$$|5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} \qquad \text{(Punkt B)}$$

Die beiden völlig verschiedenen komplexe Zahlen 7 + i und 5 + 5i haben denselben Betrag. Sie sind also gleich weit vom Ursprung entfernt.

Zahlen mit dem gleichen Betrag liegen also auf einem Kreis um den Ursprung!

Nehmen wir jetzt den Kreis mit Radius $r = \sqrt{50}$:

A: $|7 + i| = \sqrt{7^2 + 1^1} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$

B: $|5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

C: $|1 - 7i| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$

D: $|5 - 5i| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

E: $\left|\sqrt{34} + 4i\right| = \sqrt{34 + 16} = \sqrt{50}$

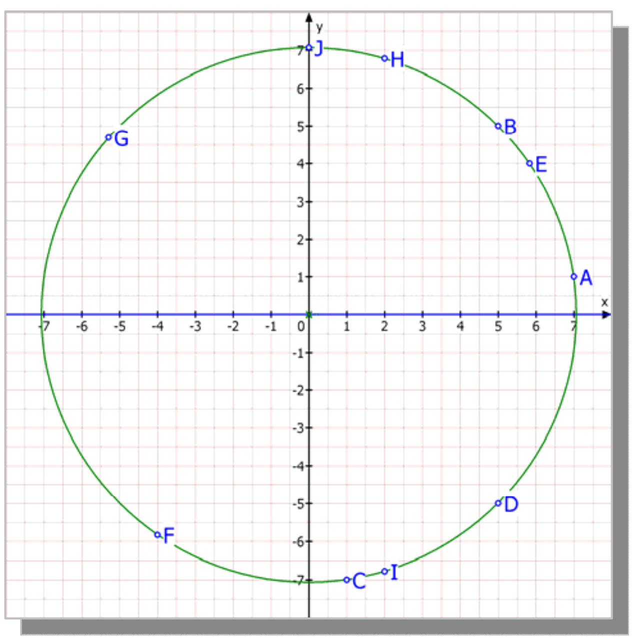
F: $\left|4 - i\sqrt{34}\right| = \sqrt{16 + 34} = \sqrt{50}$

G: $\left|2\sqrt{7} + i \cdot \sqrt{22}\right| = \sqrt{4 \cdot 7 + 22} = \sqrt{50}$

H: $\left|2 + i \cdot \sqrt{46}\right| = \sqrt{4 + 46} = \sqrt{50}$

I: $\left|2 - i \cdot \sqrt{46}\right| = \sqrt{4 + 46} = \sqrt{50}$

J: $\left|i\sqrt{50}\right| = "\sqrt{0 + 50}" = \sqrt{50}$



Aufgabe 11

Zeichne die zu diesen komplexen Zahlen gehörenden Punkte in ein Achsenkreuz der Gaußschen Ebene ein und berechne ihren Betrag:

a)	$4 - i$	b)	$3 + 4i$	c)	$-3 + 4i$	d)	$-2 - 3i$
e)	$-3i$	f)	$2 - 6i$	g)	$1 + i$	h)	2

Aufgabe 12

Die Punkte der folgenden Zahlen liegen auf einem Kreis um den Ursprung. Zeige dies rechnerisch durch Berechnung des Betrags, zeichne sie ein und finde weitere Punkte dieses Kreises:

$9 + 2i$, $9 - 2i$, $-9 + 2i$, $-9 - 2i$, $7 + 6i$, ... , $4 + i\sqrt{69}$, ... , $3\sqrt{5} - 2i\sqrt{10}$ ...

Aufgabe 13

Zeichne einen Kreis mit Radius $r = \sqrt{85}$. Gib 8 komplexe Zahlen an, deren Bildpunkt auf diesem Kreis liegen und zeichne sie ein. Berechne dazu ihren Betrag.

Welche Gleichung kann man diesem Kreis geben?

Zusammenstellung aller Aufgaben dieses Textes

Aufgabe 1

a) $2\cdot 3i$ b) $-3i\cdot 6i$ c) $(-3i)\cdot(-4i)$ d) $i^3\cdot 4i^2$

e) $i^5\cdot i$ f) $\dfrac{4i^3}{2i^5}$ g) $\dfrac{4i^2}{5i}$ h) $1+\dfrac{1}{i^2}$

i) $i^6+\dfrac{3}{i^2}$ j) $\dfrac{1}{(-i)^3}-i$ k) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{3}{i^3}$ l) $(2i^3)^{-3}$

Aufgabe 2

a) $\sqrt{-36}$ b) $\sqrt{-169}$ c) $\sqrt{-48}$ d) $\sqrt{-3}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{-2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$ g) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$ h) $\dfrac{24}{\sqrt{-12}+\sqrt{-18}}$

Aufgabe 3

a) $(12+15i)+(7+4i)$ b) $(-2+5i)+(7-2i)$

c) $(-3-i)+(1-5i)$ d) $(5+2i)+(-5-2i)$

e) $(7-3i)+(-7+9i)$ f) $(1+i)+(-2-i)$

g) $(7+12i)+(-8i)$ h) $\left(\frac{4}{5}-i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2-\frac{2}{5}i\right)+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)$ j) $\left(-\frac{6}{7}+\frac{4}{5}i\right)+(2-2i)$

k) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$, $z_1+z_1{}^*=?$

l) $z_2=5-8i$, $z_2+z_2{}^*=?$

m) $z_3=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$, $z_3+z_3{}^*=?$

n) $z_4=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}i$, $z_4+z_4{}^*=?$

Aufgabe 4

a) $(12+15i)-(7+4i)$ b) $(-2+5i)-(7-2i)$

c) $(-3-i)-(1-5i)$ d) $(5+2i)-(-5-2i)$

e) $(7-3i)-(-7+9i)$ f) $(1+i)-(-2-i)$

g) $(7+12i)-(-8i)$ h) $\left(\frac{4}{5}-i\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}i\right)$

i) $\left(-2-\frac{2}{5}i\right)-\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)$ j) $\left(-\frac{6}{7}+\frac{4}{5}i\right)-(2-2i)$

k) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$, $z_1-z_1{}^*=?$

l) $z_2=5-8i$, $z_2-z_2{}^*=?$

m) $z_3=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$, $z_3-z_3{}^*=?$

n) $z_4=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}i$, $z_4-z_4{}^*=?$

Aufgabe 5

a) $(2+3i)(4+7i)$ b) $(3-8i)(5+2i)$ c) $(12-i)(1-12i)$

d) $(-3+2i)(6-2i)$ e) $(5+2i)(5-2i)$ f) $(-2-7i)(-3-8i)$

Berechne $z \cdot z^*$ für

g) $z = 2 + i$ h) $z = 19 - 15i$ i) $z = \sqrt{11} + 5i$

Aufgabe 6: Bringe das Ergebnis auf die Form a + bi

a) $\frac{4}{8+3i}$ b) $\frac{i}{4-i}$ c) $\frac{2+3i}{2-3i}$ d) $\frac{4+2i}{2+4i}$

e) $\frac{8-8i}{2+2i}$ f) $\frac{1-i}{i-2}$ g) $\frac{12+5i}{13-8i}$ h) $\frac{1-4i}{5+6i}$

Aufgabe 7: Berechne die Kehrwerte zu diesen Zahlen:

a) $-4+5\cdot i$ b) $-12-5i$ c) $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{6}-\frac{5}{7}$

Aufgabe 8: Verwende die üblichen Binomischen Gesetze.

a) $\frac{3+2i}{(5-3i)^2}$ b) $\frac{2+10i}{(4+i)^2}$ c) $\frac{3-i}{(3+i)^3}$ d) $\left(\frac{2+7i}{3-2i}\right)^2$

e) $(2+4i)^3$ f) $(5-i)^3$ g) $(3+2i)^4$ h) $\frac{(4+5i)^3}{2-2i}$

Aufgabe 9:

Erstelle eine Berechnungsformel für

a) $(a+bi)^2$ b) $(a+bi)^3$

Aufgabe 9:

Erstelle eine Berechnungsformel für

a) $(a+bi)^2$ b) $(a+bi)^3$

Aufgabe 10:

Berechne die Lösungsmengen mit komplexen Zahlen für diese quadratischen Gleichungen:

a) $x^2+6x+10=0$ b) $x^2-3x+9=0$

c) $\frac{1}{2}x^2-3x+29=0$ d) $x^2+5x+7=0$

e) $3x^2-4x+2=0$ f) $\frac{3}{2}x^2+4x+8=0$

g) $x^2+7x+19=0$ h) $\frac{1}{8}x^2+3x+20=0$

Aufgabe 11:

Zeichne die zu diesen komplexen Zahlen gehörenden Punkte in ein Achsenkreuz der Gaußschen Ebene ein und berechne ihren Betrag:

a)	$4 - i$	b)	$3 + 4i$	c)	$-3 + 4i$	d)	$-2 - 3i$
e)	$-3i$	f)	$2 - 6i$	g)	$1 + i$	h)	2

Aufgabe 12:

Die Punkte der folgenden Zahlen liegen auf einem Kreis um den Ursprung. Zeige dies durch Berechnung des Betrags, zeichne sie ein und finde weitere Punkte dieses Kreises:

$9 + 2i$, $9 - 2i$, $-9 + 2i$, $-9 - 2i$, $7 + 6i$, ... , $4 + i\sqrt{69}$, ... $3\sqrt{5} - 2i\sqrt{10}$ ...

Aufgabe 13:

Zeichne einen Kreis mit Radius $r = \sqrt{85}$. Gib 8 komplexe Zahlen an, deren Bildpunkt auf diesem Kreis liegen und zeichne sie ein. Berechne dazu ihren Betrag.

Welche Gleichung kann man diesem Kreis geben?

Lösungen auf der CD